Verifica intermedia delle conoscenze acquisite di[1]
Analisi Matematica I
Marzo 2022

Esercizio n. 1 (Numeri complessi).
(A) Determinare l'equazione cartesiana e l'equazione polare dell'insieme

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = 2\} .$$

(B) Determinare l'equazione cartesiana dell'insieme

$$\{z \in \mathbb{C} : |z + i\bar{z}| = 3\sqrt{2}\} .$$

(C) Scrivere in forma algebrica e polare i numeri complessi $\sqrt[4]{\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{|i\sqrt{3} - 1|}}$, $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{|i\sqrt{3} - 1|}\right)^{1/4}$.

Esercizio n. 2 (Successioni di numeri reali).
Determinare il limite delle seguenti successioni:

$$(\mathbf{a}) \quad \left\{ \frac{\sqrt[3]{4n^5 - n^4 - 1} - \sqrt[3]{4n^5 - 2n^4 + 3}}{\sqrt[3]{5n^2 + 2n - 3}} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \left\{ \sqrt[n]{\binom{5n}{3n}} \right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} ,$$

$$(\mathbf{c}) \quad \left\{ \frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}\, n}\right)^n - 3^{n/2}}{(3n)^{n/2} - 3^{(n+2)/2}} \right\}_{n\geq 1} .$$

Esercizio n. 3 (Serie di numeri reali).
Studiare il comportamento delle seguenti serie numeriche e, quando possibile, calcolarne la somma:

$$(\mathbf{a}) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-2)^{-2n} \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \sum_{n\geq 1} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad (\mathbf{c}) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3} .$$

(Suggerimento per (b): usare la definizione di limite per $\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} = 1$)

[1] Fornire spiegazioni esaurienti alle soluzioni date.

Esercizio n. 4 (Limiti di una funzione).
Usando l'ordine degli infinitesimi, calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$(\mathbf{a}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{5\arcsin x^2 - 5x^2}{\sin 2x^6} \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{3\log x^2 - \log 64} \ ,$$

$$(\mathbf{c}) \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{3^x}\left(3+\frac{1}{2x}\right)^{2x} \ .$$

Esercizio n. 5 (Studio del grafico di una funzione).
Data la funzione

$$f(x) = \left|\log\left(\frac{2x^2-x-3}{x+2}+1\right)\right|$$

(a) determinarne il dominio e i punti di estremo locale.
(b) Verificare se i punti dove

$$\log\left(\frac{2x^2-x-3}{x+2}+1\right) = 0$$

sono punti angolosi per la funzione $f(x)$.